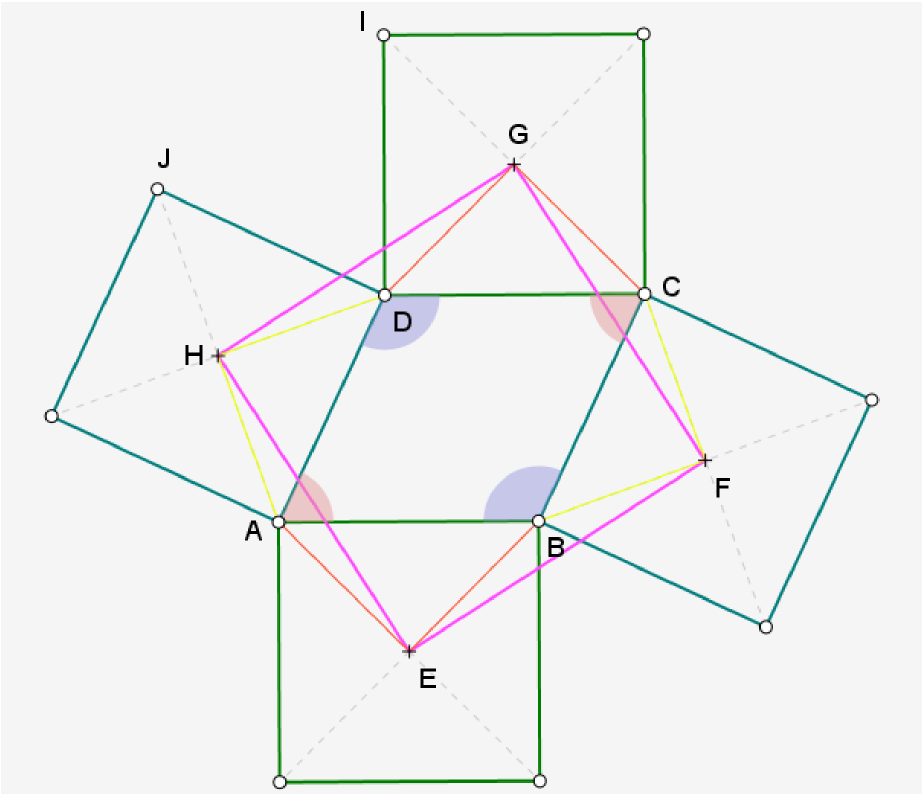
Congruência de Triângulos

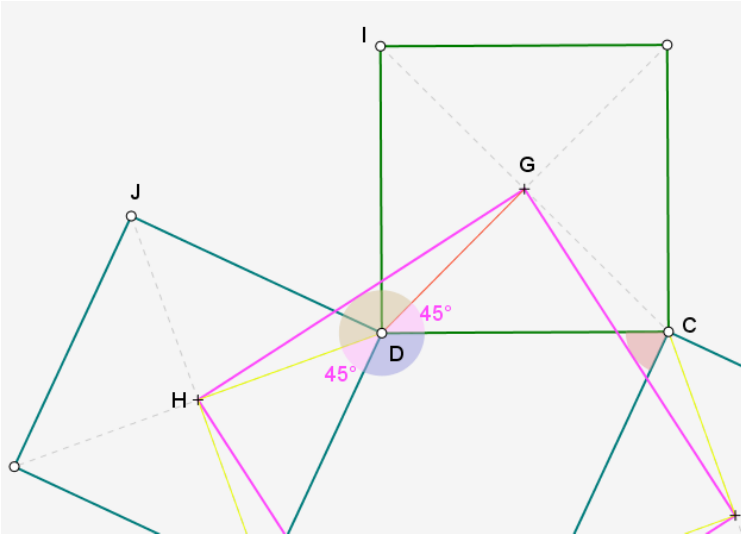
Exercício: Quatro quadrados são construídos exteriormente nos lados do paralelogramo ABCD. Mostre que os centros destes quadrados também formam um quadrado.



Temos que os centros dos quadrados são os pontos E, F, G e H, e temos que mostrar que o quadrilátero em rosa é um quadrado, isto é, temos que mostrar que todos os seus lados são iguais (HG=FE=HE=FG) e que seus ângulos são de 90°.

1) Veja que, como ABCD é um paralelogramo, *DC=AB e AD=BC*, ou seja, os segmentos em verde são todos iguais entre si, e os segmentos em azul são todos iguais entre si. Além disso *∠DAB=∠BCD e ∠ABC=∠CDA*.
2) Como os quadrados em azul são congruentes, então *AH=HD=FC=FB*, ou seja, os segmentos em amarelo são todos iguais, pois são todos metade das diagonais dos quadrados em azul. Da mesma forma *EA=EB=GC=GD*, pois são metade das diagonais dos quadrados em verde.

3) Observe que



$360° = 45°+\angle GDH+45°+\angle CDA = 45°+\angle EBF+45°+\angle ABC$

Então, teremos, $\angle GDH=\angle EBF$, pois $\angle ABC=\angle CDA$.

Fazendo da mesma forma, encontraremos $\angle HAE=\angle FCG$.

4) Pelo caso LAL, temos $\underline{\triangle HDG \equiv \triangle FBE}$ e $\underline{\triangle FCG \equiv \triangle HAE}$.

5) Portanto, $HG=FE$ e $HE=FG$.

6) Observe, agora, que

$\angle GDH = \angle GDI+\angle IDJ+\angle JDH = 45°+\angle IDJ+45° = 90°+\angle IDJ$

Além disso,

$\angle HAE = \angle HAD+\angle DAB+\angle BAE = 45°+\angle DAB+45° = 90°+\angle DAB$

7) Temos que $\angle DAB=\angle BCD$ e $\angle ABC=\angle CDA$ e

$\angle DAB+\angle BCD+\angle ABC+\angle CDA=360°$ então $\angle DAB+\angle CDA=180°$

Por outro lado, $\angle CDA+\angle IDJ=180°$ então $\angle DAB=\angle IDJ$.

8) Portanto, voltando em 6), temos que $\angle GDH=\angle HAE$.

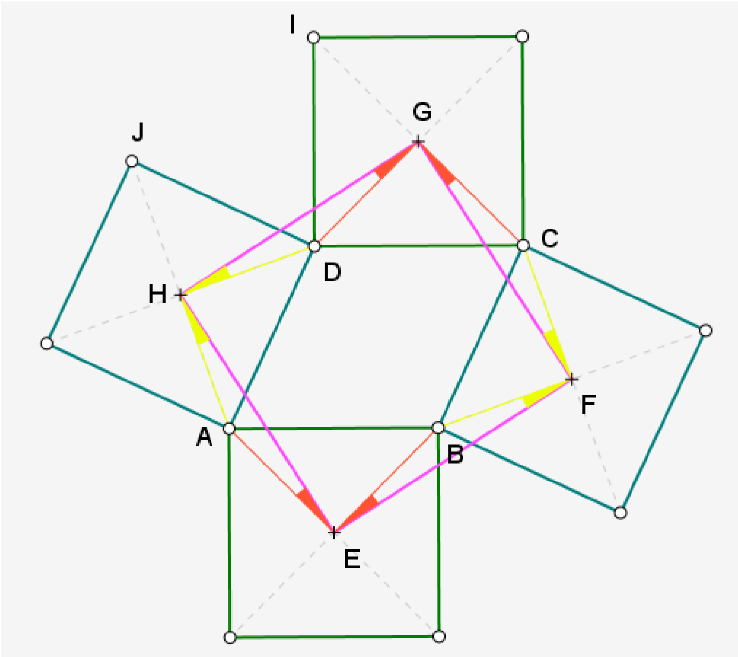
9) Logo, pelo caso LAL, temos que $\underline{HDG \equiv \triangle FBE \equiv \triangle FCG \equiv \triangle HAE}$.

10) Portanto, temos que $HG=FE=HE=FG$.

11) Além disso, temos que

$\angle CGF=\angle AEH=\angle DGH=\angle BEF.$

$\angle GHD=\angle EFB=\angle GFC=\angle EHA$ como podemos ver na figura abaixo



12) Temos que $\angle CGD = 90° = \angle CGF + \angle FGD$ como $\angle CGF = \angle DGH$ então $90° = \angle DGH + \angle FGD = \angle FGH$

Fazendo exatamente a mesma coisa com os ângulos $\angle GHE$, $\angle HEF$ e $\angle EFG$ obtemos que $\angle FGH = \angle GHE, = \angle HEF = \angle EFG = 90°$

13) Dessa forma, EFGH é um quadrado.